# Часть II СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В Части I курса рассматривались различные процессы, характеризуемые системами с сосредоточенными параметрами. Функции состояния этих систем зависели от единственной переменной – времени. В основе их математических моделей лежали обыкновенные дифференциальные уравнения. Соответствующее фазовое пространство при этом оказывалось конечномерным, т.е. состояние системы в каждый момент времени можно было охарактеризовать конечным набором чисел.

Однако на практике часто состояние системы меняется не только со временем, но и от точке к точке рассматриваемого объекта. Соответствующие функции состояния уже зависят от нескольких аргументов, среди которых имеются одна или несколько пространственных переменных. В качестве уравнений состояния здесь уже выступают дифференциальные уравнения в частных производных. Им соответствует бесконечномерное фазовое пространство. Указанный набор свойств соответствует системам с распределенными параметрами, которые составляют предмет Части II настоящего курса.

Эта Часть состоит из пяти лекций. Главы 10 и 11 посвящены процессам переноса. Они характеризуются тем, что в некоторой среде неравномерно распределена какая-либо субстанция (тепло, вещество, популяция биологического вида, товар, информация и т.д.), то в силу некоторых обстоятельств наблюдается перераспределение этой субстанции из области, где ее относительно много, в область, где ее существенно меньше. Указанные процессы характеризуются однотипными моделями типа уравнения теплопроводности. Оно представляет собой уравнение в частных производных параболического типа. В указанных х рассматриваются процессы переноса, относящиеся к различным предметным областям. Описываются качественные и количественные методы их анализа.

В Главе 12 рассматриваются волновые процессы. Они являются распределенными аналогами механических и электрических колебаний, описанных в первой части курса. Примерами таких процессов являются колебания струны или мембраны и распространение волн различной природы – электромагнитных, звуковых и др. Подобные процессы описываются уравнениями гиперболического типа, типичным примером которого является уравнение колебания струны.

Особенностью простейших процессов переноса является стремление системы к некоторому положению равновесия, а простейших волновых процессов – колебания характеристик системы вокруг положения равновесия. Если в качестве начального состояния системы задать эти положения равновесия, то функции состояния со временем меняться не будут, а система оказывается стационарной. В Главе 13 рассматриваются стационарные системы. Они описываются уравнениями в частных производных эллиптического типа, примером которых являются уравнение Пуассона и его однородный аналог уравнение Лапласа. Такие уравнения описывают, в частности, электростатическое, гравитационное и некоторые другие типы физических полей.

На практике часто проходится иметь дело не с одной, а с несколькими функциями состояния системы различной природы, связанными между собой. В этом случае в основе математической модели исследуемого процесса лежит система разнородных уравнений. Яркие примеры таких задач, имеющие чрезвычайно важное теоретическое и практическое значение, дает механика жидкости и газа, см. Глава 14. Здесь рассматриваются различные системы уравнений, связывающие вектор скорости, давление и плотность жидкости или газа.

Заключительная Глава 15 посвящена задачам квантовой механики. В основе рассматриваемых математических моделей здесь лежит удивительное уравнение Шрёдингера. Оно представляет собой уравнение в частных производных относительно волновой функции, принимающей комплексные значения и имеющей вероятностную интерпретацию.

# 10. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА. 1.

*Наука родилась из веры в математическую сущность природы*, *утвердившуюся задолго до того*, *как это удалось проверить экспериментально*.

Джон Герман РЭНДАЛЛ

Анализ математических моделей, характеризуемых системами с распределенными параметрами, мы начинаем с рассмотрения процессов переноса. Они характеризуются переносом некоторой субстанции (тепла, вещества, заряда, и др.) из области, где ее концентрация (количество субстанции, приходящееся на единицу длины, площади или объема) достаточно высока в область, где значение этой концентрации сравнительно мало. В этих условиях в силу определенных причин наблюдается перераспределение рассматриваемой субстанции, вследствие чего система со временем стремится к некоторому равновесному состоянию. К подобному классу явлений относятся теплопроводность, диффузия, электропроводность и др. Все они при определенных условиях описываются идентичными уравнениями в частных производных типа теплопроводности.

В первой главе, посвященной процессам переноса, рассматривается главным образом уравнение теплопроводности, описывающее перераспределение температуры в некоторой области под действием тепловых потоков. Оно является основой математических моделей ***теплофизики***[[1]](#endnote-1). В Главе дается вывод уравнения теплопроводности и постановка важнейших краевых задач для нее. С помощью метода разделения переменных решается данное уравнение с известной температурой в начальной момент времени и на границе рассматриваемой области.

В Приложении описываются некоторые обобщения уравнения теплопроводности. Решается уравнение теплопроводности с известным тепловым потоком на границе рассматриваемой области. Выводится математическая модель процесса диффузии, описывающая распределение концентраций жидкости или газа в некотором объеме и также характеризуемая уравнением теплопроводности.

#### **1. Уравнение теплопроводности**

Рассматривается некоторое неравномерно нагретое тело. Отдельные его части оказываются более теплыми по сравнению с другими. Со временем почему-то происходит остывание более теплых участков и нагрев более холодных[[2]](#endnote-2). Тем самым наблюдается перенос тепла в данном теле. Построим математическую модель описанного явления.

Функцией состояния исследуемого процесса является ***температура*** *u*. Очевидно, рассматриваемый объект оказывается распределенным, коль скоро температура меняется от точки к точке заданной области. Для простоты будем считать, что данное тело представляет собой достаточно длинным и тонким. В этом случае можно предположить, что все характеристики процесса усреднены по сечению и зависят от единственной пространственной координаты *х*, направленной вдоль его оси[[3]](#endnote-3). Необходимо получить некоторое соотношение для определения зависимости температуры от времени и пространственной переменной. Тем самым задача состоит в определении функции двух переменных *u = u*(*x*,*t*).

Для начала установим изменение количества тепла на некотором участке тела от точки *х* до *х*+Δ*х* за время от *t* до *t*+Δ*t*. Для того чтобы нагреть тело массой *m* с температурой *u*1 до температуры *u*2 необходимо затратить количество тепла

 *Q* = *cm*(*u*2 – *u*1), (10.1)

где коэффициент пропорциональности *с* называется ***теплоемкостью*** и является характеристикой материала, из которого состоит тело.

Входящая в последнее равенство масса не является свойством материала, т.е. параметром системы. Это объясняется тем, что масса в значительной степени зависит от размеров тела. Истинным параметром системы, определяющим массу объекта, является ***плотность***, характеризующая массу единицы объема. Поскольку в данном случае тело считается одномерным, то рассматривается его линейная плотность *ρ*, т.е. масса, приходящаяся на единицу длины. Тем самым масса однородного тела длиной Δ*х* равна *m*=*ρ*Δ*x*. Таким образом, равенство (10.1) приводится к следующему виду

*Q* = *cρ*(*u*2 – *u*1)Δ*х*.

Недостатком данной формулы является предположение о том, что все характеристики процесса остаются неизменными на участке [*х*,*х*+Δ*х*]. В действительности же, по крайней мере, температура тела, а в случае неоднородного тела, т.е. состоящего из неоднородного материала – и параметры *с* и *ρ*, характеризующие свойства материала, меняется от точки к точке. Тем самым эта формула имеет смысл лишь на сколь угодно малом участке[[4]](#endnote-4) [*х*,*х*+*dх*]. Обозначив его через длину *dx*, а соответствующее значение количества тепла – через *dQ*, получаем равенство[[5]](#endnote-5)

*dQ* = *cρ*(*u*2 – *u*1)*dх*,

Можно здесь предположить, что *u*1 – это температура тела в момент времени *t*, а *u*2 – в последующий момент времени *t*+Δ*t*. Тогда изменение количества тепла за время от *t* до *t*+Δ*t* на рассматриваемом малом участке равно

*dQ* = *cρ*[*u*(*x*,*t*+Δ*t*)– *u*(*x*,*t*)]*dх*.

Однако в действительности нас интересует не идеализированный сколь угодно малый интервал [*х*,*х*+*dх*], а протяженный участок [*х*,*х*+Δ*х*]. Очевидно, величина

  (10.2)

характеризует количество тепла, которое необходимо затратить для нагрева[[6]](#endnote-6) рассматриваемого участка тела на заданном интервале времени[[7]](#endnote-7).

Итак, мы установили значение изменения количества тепла. Теперь предстоит определить, за счет чего оно могло произойти. Существует масса причин, способных вызвать изменение температуры тела. Это и механическое перемещение нагретого тела (конвективный перенос тепла), и теплообмен с окружающей средой, и тепловое излучение, и действие внешних источников тепла (печь, химическая реакция, лазер и т.д.)[[8]](#endnote-8). Однако в данном случае мы ограничимся рассмотрением изменения температуры тела исключительно за счет явления ***теплопроводности***, при котором наблюдается переход тепла из более теплой части тела в более холодную.

Указанный процесс можно охарактеризовать плотностью теплового потока или кратко ***тепловым потоком*** *q*, представляющим собой количество тепла, проходящее в единицу времени через данную точку[[9]](#endnote-9). Если тепловой поток остается неизменным, то за время от *t* до *t*+Δ*t* через данную точку пройдет следующее количество тепла

*Q* = *q*Δ*t*.

В случае переменного теплового потока это равенство имеет смысл лишь на сколь угодно малом интервале времени *dt*:

*dQ* = *qdt*.

Тогда количество тепла на интервале времени [*t*,*t*+Δ*t*] равно интегралу



Нас интересует изменение количества тепла на данном интервале времени на участке [*х*,*х*+Δ*х*]. Выбираем для определенности направление координаты совпадающим с направлением теплового потока, см. Рис. 10.1. Тогда в точке *х* поток входит в рассматриваемую область, а в точке *х*+Δ*х* – выходит[[10]](#endnote-10). Таким образом, изменение количества тепла в данной области на исследуемом интервале времени равно

  (10.3)

Для преобразования этой формулы установим связь между тепловым потоком и температурой.


Рис. 10.1. Направления теплового потока.

Рассмотрим две точки с координатами *х*1 и *х*2, причем *х*1 < *х*2. Обозначим через *u*1 и *u*2 температуры этих точек. Оценим тепловой поток от одной точки к другой. Очевидно, он будет тем больше, чем больше разность температур и чем меньше расстояние между точками. Отметим, что тепло распространяется от горячего тела к холодному. Таким образом, при *u*1<*u*2 направление теплового потока будет положительным, а при *u*1>*u*2 – отрицательным (см. Рис. 10.1). В результате приходим к формуле



где коэффициент пропорциональности *λ* называется коэффициентом теплопроводности или кратко ***теплопроводностью*** и является параметром процесса, характеризующим способность тела проводить тепло.

При рассмотрении не двух отдельных точек, а сплошного тела последнее равенство сохраняет смысл при сколь угодно большой близости рассматриваемых точек. Устремляя точку *х*2 к *х*1, получаем в правой части последнего равенства производную от температуры по пространственной переменной. Таким образом, справедливо соотношение



называемое ***законом Фурье***. Подставляя значение теплового потока в равенство (10.3), находим величину

  (10.4)

Мы предполагаем, что тепловой баланс на данном участке на исследуемом интервале времени осуществляется исключительно за счет явления теплопроводности. Тем самым справедливо равенство

*Q*1 = *Q*2.

Пользуясь формулами (10.2), (10.4), будем иметь

  (10.5)

Для преобразования формулы (10.5) используется ***теорема о среднем***. Согласно этому утверждению, если функция *f = f*(*y*) непрерывна на некотором отрезке [*a,b*], то на этом отрезке найдется такая точка *c*, что имеет место равенство[[11]](#endnote-11)



Применяя теорему о среднем для обоих интегралов в равенстве (10.5), получаем



где *ξ*∈[*x*, *x*+Δ*x*], *τ*∈[*t*, *t*+Δ*t*]. После деления на Δ*x*Δ*t* будем иметь



Переходя к пределу при Δ*t*→0, Δ*x*→0, установим равенство

  (10.6)

справедливое для любых значений аргументов *x* и *t*. Данное соотношение включает в себя частные производные от неизвестной функции *u* по переменным *x* и *t[[12]](#endnote-12)*. Вследствие этого мы имеем дело с ***дифференциальным уравнением с частными производными***[[13]](#endnote-13). Оно называется ***уравнением теплопроводности*** и является основой математической моделью исследуемого процесса. Если рассматриваемое тело является однородным, то параметры *c*, *ρ* и *λ* постоянны, а уравнение теплопроводности принимает вид[[14]](#endnote-14)

 *ut = a*2*uxx*, (10.7)

где через *ut* и *uxx* обозначены первая производная по *t* и вторая производная по *x* от функции *u*, а параметр



называется коэффициентом ***температуропроводности***.

Как мы знаем, математическую модель системы составляет не одно дифференциальное уравнение состояния, но и дополняющие его краевые условия. Ранее функции состояния зависели от единственной переменной – времени. В данном случае добавилась еще и пространственная переменная. В этой связи математическая модель рассматриваемого процесса будет включать в себя условия как по времени, так и по пространственной переменной.

Рассмотрим уравнение теплопроводности для тела длиной *L*. Будем считать, что левый конец расположен в начале координат, а правый имеет координату *х* = *L*. Будем исследовать процесс, начиная с момента времени *t*=0. Уравнение теплопроводности имеет первый порядок по времени и второй по пространственной координате[[15]](#endnote-15). Для однозначности решения задачи требуется задать дополнительно соответствующее количество краевых условий.

Условие по времени вполне естественно. Оно задается в начальный момент времени[[16]](#endnote-16). Характерно, что начальная температура тела может меняться от точки к точке. Тогда начальное условие имеет вид

 *u*(*x*,0) = *ϕ*(*x*), (10.8)

где *ϕ* – известное начальное распределение температуры. Помимо начального условия (10.8) необходимо задать еще два ***граничных условия***, поскольку в уравнение теплопроводности входит вторая производная от искомой функции. И здесь возможны варианты.

На левом конце тела, т.е. при *x*=0 может быть задан закон изменения температуры *α*

u(0,t) = α(t),

что соответствует граничному ***условию первого рода***. Альтернативой здесь может быть задание теплового потока *β* на левой границе, что соответствует ***условию второго рода***

*λux*(0,*t*) = *β*(*t*).

В частности, при *β* = 0 получаем ***условие теплоизоляции***. Иногда рассматривается также ***условие третьего рода***

*λux*(0,*t*) = *k*[*u*(0,*t*) – *u*0(*t*)],

описывающее теплообмен с окружающей средой, где параметр *k* есть ***коэффициент теплообмена***, а функция *u*0 выражает температуру окружающей среды. Аналогичные условия могут быть заданы и на правом конце тела.

Мы ограничимся рассмотрением случая, когда в состав математической модели входят по одному граничному условию на каждом конце тела[[17]](#endnote-17). Поскольку поведение системы на обеих границах не зависят друг от друга, то допустимы различные сочетания граничных условий. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением важнейших задач, когда на концах тела заданы однотипные условия. В частности, ***первая краевая задача***, включает в себя уравнение теплопроводности в форме (10.6) или (10.7) с начальным условием (10.8) и двумя условиями первого рода

 *u*(0,*t*) = *α*1(*t*), *u*(*L*,*t*) = *α*2(*t*), (10.9)

где функции *α*1 и *α*2 являются известными. Для ***второй краевой задачи*** соотношения (10.9) заменяются на условия второго рода

 *λux*(0,*t*) = *β*1(*t*), *λux*(*L*,*t*) = *β*2(*t*), (10.10)

где функции *β*1 и *β*2 известны.

Ниже мы найдем решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Соответствующая вторая краевая задача рассматривается в Приложении[[18]](#endnote-18).

|  |
| --- |
| *Процесс переноса тепла за счет явления теплопроводности описывается уравнением в частных производных.**Математическая модель процесса представляет собой краевую задачу для уравнения теплопроводности*. |

#### **2. Первая краевая задача для однородного уравнения теплопроводности**

Рассмотрим уравнение теплопроводности

 *ut*(*x*,*t*) = *a*2*uxx*(*x*,*t*), 0<*x*<*L*, *t* >0 (10.11)

с начальным условием

 *u*(*x*,0) = *ϕ*(*x*), 0<*x*<*L*  (10.12)

и граничными условия первого рода

 *u*(0,*t*) = 0, *u* (*L*,*t*) = 0, *t* >0, (10.13)

где функция *ϕ* и параметры *a* и *L* считаются известными[[19]](#endnote-19). В связи со свойством граничных условий (10.13) исследуемая первая краевая задача называется однородной[[20]](#endnote-20).

Решение данной задачи попытаемся искать в виде

 *u*(*x*,*t*) = *X*(*x*)*T*(*t*), (10.14)

где функции *X* и *T* выбираются так, чтобы добиться желаемого результата. В частности, подставляя это значение в граничные условия (10.13), будем иметь

*X*(0)*T*(*t*) = 0, *X*(*L*)*T*(*t*) = 0, *t* >0.

Полученные равенства могут выполняться в двух случаях – либо когда функция *T* тождественно равна нулю, либо когда функция *X* обращается в нуль на границе. В первом случае согласно формуле (10.14) исковая функция *u* везде обращается в нуль. Однако это противоречит начальному условию (10.12), если исключить из рассмотрения тривиальный случай *ϕ*=0. Тем самым приходи к равенствам

 *X*(0) = 0, *X*(*L*) = 0. (10.15)

Подставляя функцию *u* из равенства (10.14), будем иметь

*X*(*x*)*T* '(*t*) = *a*2*X*"(*x*)*T*(*t*).

Отсюда следует равенство



Здесь в левой части стоит выражение, зависящее только от *t*, а правая часть – только от *x*. Такое равенство возможно исключительно в том случае, когда эти выражения являются константами. Обозначая соответствующую константу через *λ*, приходим к двум равенствам

  (10.16)

  (10.17)

Мы получили два обыкновенных дифференциальных уравнения, характеризующие временную и пространственную часть гипотетического решения задачи и связанные общей константой *λ*. Вследствие возможности исследования уравнений (10.16) и (10.17) независимо друг от друга, используемый способ анализа рассматриваемой краевой задачи называется ***методом разделения переменных***.

Отметим, что для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (10.17) ранее мы получили граничные условия (10.15). Таким образом, мы имеем ***краевую задачу*** для рассматриваемого уравнения. Прежде всего, отметим, что она имеет тождественно нулевое решение. Может создаться впечатление, что вследствие этого данная задача бессмысленна, поскольку после подстановки такого решения в формулу (10.14) получается функция *u*, тождественно равная нулю, что противоречит начальному условию (10.12). Однако в задаче (10.17), (10.15) неизвестна не только функция *X*, но и константа *λ*. Вследствие этого можно ожидать, что при каких-то значениях *λ* краевая задача будет иметь нетривиальное, т.е. отличное от нуля решения. Задача определения нетривиальных функций *X*, удовлетворяющих уравнению (10.17) с граничными условиями (10.15), и соответствующих значений *λ* называется ***задачей Штурма–Лиувилля***. Такие решения краевой задачи называются ***собственными функциями*** задачи, а соответствующие значения *λ* – ***собственными числами***[[21]](#endnote-21).

Характеристическое уравнение *z*2–*λ=*0 для уравнения (10.17) имеет решения  При положительных значениях *λ* общее решение для уравнения (10.17) имеет вид



Подставляя это значение в граничные условия (10.15), заключаем, что константы *c*1 и *c*2, а значит, и функция*X* равны нулю. При *λ=*0 уравнение (10.17) имеет общее решение



Тогда из условий (10.15) вновь следует, что *X=*0. Наконец, при *λ*<0 находим



Согласно первому условию (10.15) имеем. Определим значение



Учитывая что константа *c*1 не может обращаться в нуль (иначе решение окажется тривиальным), заключаем, что  Теперь находим значения



которые и являются собственными числами. Соответствующие собственные функции есть



где константы *ck* произвольны.

При  уравнение (10.16) имеет общее решение



где константы *bk* произвольны. Подставляя найденные решения уравнений (10.16), (10.17) в формулу (10.14), находим



где  Непосредственной проверкой можно убедиться, что для любых номера *k* и константы *ϕk* найденная функция *uk* удовлетворяет уравнению (10.11) и граничным условиям (10.13). Аналогичными свойствами обладает и сумма всех таких решений[[22]](#endnote-22)

  (10.18)

 Последнее, что предстоит сделать, это подобрать числа *ϕk* так, чтобы определяемая по формуле (10.18) функция *uk* удовлетворяла начальному условию (10.12). После соответствующей подстановке имеем



Умножим это равенство на функцию для произвольного номера *n* и проинтегрируем результат по *x* от 0 до *L*. Получаем[[23]](#endnote-23)

  (10.19)

Пользуясь формулой произведения синусов, вычисляем



При *k*≠*n* находим



При *k=n* имеем



Подставляя найденные значения интегралов в формулу (10.19), находим значения[[24]](#endnote-24)

  (10.20)

Итак, решение задачи (10.11) – (10.13) определяется в виде ***ряда Фурье*** (10.18) с коэффициентами *ϕk*, вычисляемыми по формуле (10.20).

Для прояснения полученных результатов рассмотрим частный случай, когда *X*=*π*, и *ϕ*(*x*)=sin*x.* Таким образом, рассматривается тело длиной *π*, на концах которого неизменно поддерживается нулевая температура. В начальный момент времени температура тела распределена по синусоидальному закону. Подставляя указанную функцию *ϕ* в равенства (10.20) находим коэффициенты

*ϕ*1 = 1, *ϕk* = 0, *k =*2,3,… .

Тогда согласно формуле (10.18) решение задачи определяется по формуле

**

Согласно этой формуле распределение температуры по длине тела в любой момент времени остается синусоидальным. При этом температура тела в любой его точке со временем экспоненциально убывает и стремится к нулю при *t*→∞. Таким образом, мы наблюдаем постепенное остывание тела, причем интенсивность остывания будет наивысшей в его центре (см. Рис. 10.2).

Проанализируем полученные результаты. В начальный момент времени температура распределена не равномерно. Согласно закону Фурье возникают тепловые потоки, направленные из центра к краям тела. В силу того, что тепло уходит из центральной части тела, температура там убывает. Если бы тело было теплоизолированным, то мы наблюдали бы нагрев его концов за счет притока тепла из центра. Однако на концах тела постоянно поддерживается нулевая температура. Это означает, что подвод тепла из центра компенсируется отводом через границу в окружающую среду.



Рис. 10.2. Изменение температуры тела для первой краевой задачи.

Согласно закону Фурье значение теплового потока пропорционально разности температур. Как уже отмечалось, со временем температура в центре убывает, а на концах она остается неизменной. Таким образом, разность температур между центром и границами (точнее, производная *ux*) со временем убывает. Вследствие этого уменьшается и тепловой поток. Тогда в единицу времени из центра будет уходить всё меньшее количество тепла. Следовательно, остывание тела будет продолжаться, но с монотонно убывающей скоростью. Со временем всё тепло из тела уйдет в окружающую среду. В этой связи внутри тела установится равномерное (нулевое) распределение температуры[[25]](#endnote-25).

Можно также оценить влияние коэффициента температуропроводности на течение процесса. Очевидно, чем больше значение параметра *а*, тем быстрее происходит остывание тела (см. Рис. 10.3). Таким образом, этот коэффициент характеризует интенсивность переноса тепла данным материалом.

**Задание 10.1. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности**. Рассматривается уравнение теплопроводности *cρut=λuxx* на отрезке [0,*L*] с начальным условием *u*(*x*,0)=*b*sin*πx*/*L* и однородными граничными условиями. Провести следующий анализ.

1. Дать физическую интерпретацию поставленной задачи.

2. В соответствие с методом разделения переменных найти ее решение.

3. Установить влияние длины тела *L*, плотности *ρ*, и максимальной начальной температуры *b* на результат. Объяснить физический смысл полученных результатов.

4. Найти закон изменения со временем теплового потока *λux* на правом конце тела.

5. Определить закон изменения со временем температуры в середине тела. Оценить влияние коэффициента теплопроводности *λ* на этот результат. Объяснить полученные результаты.



Рис. 10.3. Тело остывает тем быстрее, чем больше коэффициент *а*.

|  |
| --- |
| *Решение уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями**в соответствии с методом разделения переменных определяется в виде ряда Фурье, коэффициенты которого определяются начальным распределением температуры.* |

#### **3. Неоднородное уравнение теплопроводности**

На тело может воздействовать также какой-либо внешний источник тепла, связанный с действием печи, химической реакции, лазерным излучением и т.п.[[26]](#endnote-26) Эти явления можно охарактеризовать с помощью плотности теплового источника *F* – количества тепла, получаемого или отдаваемого телом в единицу времени. Величина *F* является, вообще говоря, функцией времени и пространственной переменной. При наличии внешних источников тепла процесс описывается ***неоднородным уравнением теплопроводности***



Рассмотрим это уравнение для однородного тела длиной *L*. Получаем уравнение

 *ut*(*x*,*t*) = *a*2*uxx*(*x*,*t*) + *f*(*x*,*t*), 0<*x*<*L*, *t* >0, (10.21)

где



Уравнение (10.21) дополняется начальным условием

 *u*(*x*,0) = *ϕ*(*x*), 0<*x*<*L*  (10.22)

и однородными граничными условиями первого рода[[27]](#endnote-27)

 *u*(0,*t*) = 0, *u*(*L*,*t*) = 0, *t* >0. (10.23)

В соответствии с ***методом Фурье*** решение задачи (10.21) – (10.23) в виде ряда Фурье

  (10.24)

аналогичном (10.18), с неизвестной функцией *uk*. Для ее нахождения следует подставить значение функции *u* из формулы (10.24) в равенства (10.21) и (10.22). Находим производные[[28]](#endnote-28)



Подставляя эти значения в равенство (10.21), будем иметь



Умножая это равенство на функцию , после интегрирования получаем



Вычисляя интегралы, как это делалось при выводе формулы (10.18), приходим к соотношениям

  (10.25)

где

  (10.26)

Умножая равенство (10.22) на функцию  после интегрирования с учетом формулы (10.24), установим

  (10.27)

где

  (10.28)

Найдем решение уравнения (10.25) с начальным условием (10.27). Равенство (10.25) можно представить в виде



Умножая это выражение на  и интегрируя результат по *t* от нуля до некоторого произвольного значения *t* с учетом начального условия (10.27), будем иметь



В результате находим

  (10.29)

Итак, решение задачи (10.21) – (10.23) определяется по формуле (10.24), где функция *uk* находится из равенства (10.29), а коэффициенты Фурье функций *f* и *ϕ* задаются соотношениями (10.26) и (10.28).

Рассмотрим достаточно простой частный случай задачи (10.21) – (10.23) со следующими значениями параметров

*L=*1, *a=*1, *ϕ*(*x*)=0, *f*(*x*,*t*) = sin*πx*.

Итак, рассматривается теплоперенос в теле единичной длины с единичным коэффициентом температуропроводности. В начальный момент времени по всему телу задается нулевая температура, а на его границах постоянно поддерживается нулевая температура. Наконец, на систему действует постоянный источник тепла, причем его действие максимально в центре тела и убывает до нуля по мере приближения к границам.

Обратимся теперь к решению задачи. Очевидно, все коэффициенты Фурье функции *ϕ* и все коэффициенты Фурье функции *f*, начиная со второго, равны нулю, а *f*1=1. В результате из формул (10.29) находим

*u*1(*t*) = 1 – *e-πt*, *uk*(*t*) = 0, *k=*2,3,… .

В результате из формулы (10.24) находим решение задачи

*u*(*x*,*t*) = (1–*e-πt*) sin*πx.*

Проанализируем полученные результаты. Очевидно, в любой отличный от нуля момент времени температура распределена по синусоидальному закону по длине тела (см. Рис. 10.4). При этом температура в любой точке области растет больше у центра, меньше – на удалении от него. Отметим, что скорость роста температуры в любой точке *x* постепенно убывает. При неограниченном возрастании времени температура в этой точке стремится к величине sin*πx*. Таким образом, со временем распределение температур до длине тела будет характеризоваться функцией *u*∞(*x*) = sin*πx*.

Попытаемся объяснить наблюдаемое течение процесса. Итак, изначально в теле поддерживается нулевая температура. Однако на тело действует источник тепла, вследствие чего тело нагревается сильнее в его центре с убыванием вправо и влево от него. В результате тело нагревается, причем тем больше, чем ближе к центру. В силу неравномерности распределения температуры возникают тепловые потоки из более горечей области в более холодную, т.е. от центра к границам. Поскольку на границах температура неизменно нулевая, а в центре происходит нагрев, тепло выходит через границы в окружающую среду. Тем самым тело, с одной стороны, нагревается под действием имеющегося источника тепла, а, с другой стороны, остывает за счет отвода тепла через границы. Отметим, что действие источника тепла постоянно. Однако, чем больше температура тела в центре, тем больше разность температур между центром и границами, поскольку там температура неизменно нулевая. Следовательно, со временем тепловой поток через границу возрастает в соответствии с законом Фурье. Со временем всё возрастающий отвод тепла через границу компенсирует приток тепла за счет действия источника. Вследствие этого система выходит в некоторое равновесное состояние, характеризуемое функцией *u*∞[[29]](#endnote-29).



Рис. 10.4. Изменение температуры тела для первой краевой задачи.

**Задание 10.2. Неоднородное уравнение теплопроводности**. Рассматривается уравнение теплопроводности *ut=λuxx+e-t*sin*x* на отрезке [0,*π*] с начальным условием *u*(*x*,0)=sin*x* и однородными граничными условиями. Провести следующий анализ.

1. Дать физическую интерпретацию поставленной задачи.

2. В соответствие с методом Фурье найти решение поставленной задачи и дать его физическую интерпретацию.

3. Определить закон изменения со временем температуры в середине тела. Объяснить полученный результат.

4. Установить поведение системы при неограниченном возрастании времени.

5. Установить влияние коэффициента теплопроводности *λ* на решение. Объяснить физический смысл полученного результата.

6. Найти закон изменения со временем теплового потока *λux* на левом конце тела. Объяснить полученный результат.

|  |
| --- |
| *Решение неоднородного уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями находится с помощью метода Фурье.**Полученное решение характеризуется рядом Фурье, коэффициенты которого определяются начальным распределением температуры и действующим источником.**При постоянстве источника тепла система стремится к положению равновесия.* |

**Направление дальнейшей работы**. Мы познакомились с уравнением теплопроводности и некоторыми методами их решения. Дальнейшее изучение процессов переноса продолжится в последующей Главе. В частности, мы убедимся в том, что помимо процесса переноса тепла и рассмотренного в Приложении явления диффузии существуют и другие процессы, описываемые уравнением теплопроводности. Мы рассмотрим также приближенные методы решения соответствующих задач. Кроме того, будут описаны некоторые специальные математические модели, связанные с процессами переноса.

### **ПРИЛОЖЕНИЯ**

Мы рассмотрели процесс переноса тепла за счет явления теплопроводности. Однако температура тела может меняться и под действием других факторов. Ниже мы рассмотрим некоторые обобщения уравнения теплопроводности.

Ранее было проведено решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, когда на границе тела была задана температура. Теперь мы рассмотрим вторую краевую задачу с известным тепловым потоком на границе.

Наконец, мы убедимся в том, что явление диффузии, т.е. перенос массы[[30]](#endnote-30) также описывается уравнением теплопроводности.

#### **1. Обобщения уравнения теплопроводности**

Ранее мы рассмотрели случай, когда перенос тепла был обусловлен исключительно явлением теплопроводности, обусловленной тепловыми потоками в неравномерно нагретом теле. Кроме того, исследовалось действие тепловых источников. Однако могут существовать и другие причины, вызывающие изменение температуры тела. Одно из таких причин является ***конвекция***, связанная с движением рассматриваемого тела, например, потока жидкости или газа. Если нагретое тело движется со скоростью *v*, то вместо соотношения (10.6) получается более общее уравнение



При наличии теплообмена между рассматриваемым телом и окружающей средой уравнение теплопроводности принимает вид



где *u*0 – температура окружающей среды, а *k* – коэффициентом теплообмена, характеризующий интенсивность теплового взаимодействия между телом и окружающей средой. Можно рассмотреть и общий случай, когда имеется одновременно все выше указанные факторы, а система описывается уравнением[[31]](#endnote-31)



Все рассмотренные модели относятся к пространственно одномерному телу. Однако допущение о том, что рассматриваемое тело можно рассматривать как одномерный объект, далеко не всегда оправдано. Если мы имеем дело с плоским телом достаточно малой толщины, то можно пренебречь изменением его характеристик по толщине и считать рассматриваемый объект двумерным. В этом случае температура тела будет уже зависеть от времени *t* и двух пространственных переменных *x* и *y*. Уравнение теплопроводности для неоднородного двумерного тела имеет вид



Для однородного случая этого уравнение можно записать следующем образом

*ut*= *a*2(*uxx* + *uyy*).

Если же у нас нет возможности интерпретировать данный объект как одномерное или плоское тело, то необходимо рассматривать перенос тепла в пространстве. При этом температура будет уже зависеть от трех пространственных переменных *х*, *у*, *z*. Соответствующее уравнение теплопроводности в простейшем случае имеет вид

*ut*= *a*2(*uxx* + *uyy* + *uzz*).

Отметим, что в математической физике широко используется ***оператор Лапласа*** Δ, представляющий собой сумму вторых производных по пространственным переменным[[32]](#endnote-32). Если отвлечься от числа пространственных переменных, уравнение теплопроводности однородного объекта вне зависимости от его размерности можно записать единообразно в виде

*ut* = *a*2Δ*u*.

Естественно, в многомерном случае можно рассматривать тело, не однородное по своей структуре, а также учесть влияние различных типов переноса тепла, указанных выше.

Математическая модель распространения тепла во всех случаях наряду с уравнением теплопроводности в той или иной форме включает в себя и краевые условия. При этом начальное условие неизменно предполагает задание температуры тела в начальный момент времени во всех точках рассматриваемого объекта. В то же время при задании граничных условий возможны различные варианты в зависимости от особенностей рассматриваемого физического процесса. И если для рассмотренных выше обобщений уравнения теплопроводности в одномерном случае могут быть поставлены те же варианты граничных условий, что и для простейшего уравнения теплопроводности (10.6), то многомерный случай обладает своими особенностями.

Прежде всего, отметим, что в одномерном случае диапазоны изменения пространственной и временной координаты были независимы друг от друга. Вследствие этого температура как функция двух переменных определяется в прямоугольной области. Однако в многомерном случае, как двумерном, так и трехмерном, пространственные координаты, вообще говоря, не могут рассматриваться независимо друг от друга, определяя форму исследуемого объекта[[33]](#endnote-33).

Пусть, в частности, исследуется перенос тепла в некоторой двухмерной или трехмерной области Ω с границей[[34]](#endnote-34) *S*. ***Первая краевая задача*** для многомерного уравнения теплопроводности предполагает задание температуры на всей границе *S* в любой момент времени[[35]](#endnote-35).



Рис. 10.5. Область Ω с границей *S* и направления внешней нормали *n*.

Для ***второй краевой задачи*** в произвольной точке границы задается тепловой поток, который характеризуется равенством



где *n* представляет собой ***нормаль*** к границе *S* в данной точке, см. Рис. 10.5. Естественно, возможны и смешанные граничные условия, когда на разных участках границы задаются разные условия.

#### **2. Вторая краевая задача для неоднородного уравнения теплопроводности**

Ранее была рассмотрена первая краевая задача для однородного и неоднородного уравнения теплопроводности. Распространим эти результаты на случай второй краевой задачи. Пусть имеется неоднородное уравнение теплопроводности

*ut* = *a*2*uхх* + cos *x*

на отрезке (0,*π*) с начальным условием

*u*(*x*,0) = 0

и однородными граничными условиями второго рода

*ux*(0,*t*) = 0, *ux*(*π*,*t*) = 0.

Таким образом, исследуется процесс переноса тепла при наличии теплового источника, влияние которого характеризуется входящим в правую часть уравнение косинусом. Учитывая свойства этой функции, заключаем, что к левой части тела тепло подводится, а из его правой части оно отводится. При этом влияние теплового источника возрастает по мере приближения к границе тела. В начальный момент времени температура тела равна нулю. Концы тела являются теплоизолированными, т.е. взаимодействие с окружающей средой на границе тела не происходит.

Пользуясь описанной ранее методикой, можно показать, что решение данной задачи определяется по формуле[[36]](#endnote-36)

*u*(*x*,*t*) = *a* -2[1–exp(-*a* -2*t*)] cos *x*.

Таким образом, в любой момент времени распределение температур по длине тела имеет косинусодальный профиль, причем температура в левой части тела растет, а в правой – убывает (см. Рис. 10.6). В результате со временем устанавливается распределение температур *u*∞(*х*) = cos *x*. Установим физический смысл полученных результатов.



Рис. 10.6. Изменение температуры тела для второй краевой задачи.

Итак, в начальный момент времени температура распределена равномерно по всей длине тела. Изменение температуры происходит под действием внешнего теплового источника. При этом левая половина тела греется, а правая – остывает, причем, чем ближе к границе, тем сильнее влияние источника. Отметим, что действие источника тепла со временем не меняется. Однако по мере возрастания температуры слева и ее убывания справа появляется тепловой поток, действующий слева направо. В силу теплоизоляции концов тела его взаимодействие с окружающей средой отсутствует. Нагрев тела в левой его части и остывание в правой части постепенно компенсируются потоком тепла из горячей области в холодную, т.е. явлением теплопроводности. Тем самым внутри тела устанавливается ***термодинамическое равновесие***, характеризуемое предельным значением *u*∞. Отметим, что с ростом коэффициента температуропроводности *a* система быстрее выходит в равновесное состояние.

**Задание 10.3. Вторая краевая задача для однородного уравнения теплопроводности**. Рассматривается однородное уравнение теплопроводности

*ut* = *a*2*uхх*

на отрезке (0,1) с начальным условием

*u*(*x*,0) = cos *πx*

и однородными граничными условиями второго рода

*ux*(0,*t*) = 0, *ux*(1,*t*) = 0.

Провести следующий анализ.

1. Дать физическую интерпретацию постановки задачи.
2. Пользуясь методом разделения переменных, найти решение задачи.
3. Установить распределение температур при неограниченном возрастании времени.
4. Установить закон изменения со временем температуры тела на его концах.
5. Установить влияние параметра *a* на полученные результаты.
6. Дать объяснение всем предшествующим результатам.

#### **3. Уравнение диффузии**

В Части III мы неоднократно встречались с ситуацией, когда качественно разные процессы, относящиеся к совершенно разным предметным областям, описываются одними и теми же уравнениями. Тем самым уравнения могут иметь принципиально разные интерпретации. Это остается в силе при переходе от обыкновенных дифференциальных уравнений к уравнениям с частными производными. Рассмотрев некоторые задачи теплопроводности, мы теперь обращаемся к процессу диффузии.

Рассматривается некоторый объем, заполненный газом, причем распределение газа по объему предполагается неравномерным. В этих условиях мы можем наблюдать переток вещества из области, где его много, в менее заполненную область. Исследуемый процесс называется ***диффузией*** и характеризуется ***концентрацией*** – количеством молекул газа, находящихся в единице объема (в одномерном случае – на единице длины)[[37]](#endnote-37). Предположим для простоты, что рассматриваемый объем представляет собой достаточно длинный и тонкий цилиндр. При этих условиях можно считать, что концентрация *u* зависит лишь от времени *t* и одной пространственной координаты *х*, направленной вдоль оси цилиндра. Для построения математической модели исследуемого процесса установим изменения количества вещества на некотором участке [*x*,*x*+Δ*x*] за время от *t* до *t*+Δ*t*.

Если концентрация газа постоянна, то количество вещества на участке длиной Δ*х* равно

*Q = u*Δ*x*.

Поскольку в действительности концентрация вещества может меняться от точке к точке, мы можем использовать предшествующее равенство лишь на сколь угодно малом участке. В результате установим

*dQ* = *udx*.

Тогда количество вещества на интервале [*x*,*x*+Δ*x*] будет равно



Следовательно, изменение количества вещества на рассматриваемом участке за время от *t* до *t*+Δ*t* равно

  (10.30)

что является аналогом формулы (10.2).

Существуют различные причины, которые могут вызвать перераспределение вещества внутри тела. Это может быть собственно диффузия (перенос вещества из области с высокой концентрацией в область, где она мала), механическое перемещение вещества, подвод или отвод вещества через боковую поверхность цилиндра, появление или исчезновение вещества за счет химических реакций[[38]](#endnote-38), массоперенос за счет неравномерного распределения температуры или давления внутри тела (соответственно, термодиффузия и бародиффузия) и др. Мы ограничимся рассмотрения лишь переноса вещества за счет диффузии.

Процесс диффузии можно охарактеризовать с помощью понятия ***диффузионного потока*** *q*. Он представляет собой количество вещества, проходящего в единицу времени через данную точку[[39]](#endnote-39). Если диффузионный поток не меняется, то за время Δ*t* получим следующее количество вещества

*Q = q*Δ*t*.

В случае переменного диффузионного потока имеет смысл равенство

*dQ = qdt*.

Тогда за время от *t* до *t*+Δ*t* получаем величину

.

Таким образом, изменение количества вещества на участке [*x*,*x*+Δ*x*] за данное время равно

  (10.31)

что является аналогом формулы (10.3).

Установим связь между диффузионным потоком и концентрацией. Рассмотрим некоторые точки *x*1 и *x*2 при *x*1<*x*2, в которых концентрация вещества равна соответственно *u*1 и *u*2. За счет разности концентраций возникает диффузионный поток, величина которого тем выше, чем больше разность концентраций и чем меньше расстояние между точками. Учитывая, что поток направлен из области с высокой концентрацией в область, где она сравнительно мала, получаем равенство



Здесь параметр *D* называется ***коэффициентом диффузии*** и характеризует интенсивность процесса диффузии для данного вещества. При выводе последнего соотношения рассматривались лишь две изолированные точки. При рассмотрении сплошной среды это равенство имеет смысл лишь в том случае, когда расстояние между точками сколь угодно мало. Переходя к пределу при *x*2 → *x*1, установим соотношение



называемое ***законом Фика***.В результате получаем равенство

  (10.32)

аналогичное (10.4).

Материальный баланс на участке [*x*,*x*+Δ*x*] за время от *t* до *t*+Δ*t* характеризуется равенством *Q*1 = *Q*2, которое в силу условий (10.30) и (10.32) принимает вид



Пользуясь теоремой о среднем, после деления на произведение Δ*x*Δ*t* и переходя к пределу при Δ*x*→0, Δ*t*→0, установим соотношение

  (10.32)

называемое ***уравнением диффузии***. В частном случае, когда параметр *D* является постоянным, оно принимает вид

 *ut* = *a*2*uxx*, (10.33)

где *a* =.

Полученное соотношение отличается от уравнения теплопроводности (10.7) только физическим смыслом входящих в него величин. Для уравнения диффузии могут быть поставлены краевые задачи, аналогичные рассмотренным ранее. Поскольку с математической точки зрения уравнения теплопроводности и диффузии совпадают, их решения обладают одинаковыми свойствами. Аналогия между явлениями теплопроводности и диффузии представлены в Таблице 10.1.

Таблица 10.1. Аналогия между теплопроводностью и диффузией.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **раздел физики** | **теплофизика** | **молекулярная физика** |
| явление | теплопроводность | диффузия |
| локальная характеристика | температура | концентрация |
| глобальная характеристика | количество тепла | количество вещества |
| поток | тепловой поток | диффузионный поток |
| закон  | закон Фурье | закон Фика |
| коэффициент переноса | коэффициент теплопроводности | коэффициент диффузии |
| уравнение состояния | уравнение теплопроводности | уравнение диффузии |

**Задание 10.4. Первая краевая задача для неоднородного уравнения диффузии**. Рассматривается уравнение диффузии при наличии источника вещества

*ut* = *Duхх* + sin*πx*/*L*

на отрезке (0,*L*) с однородным начальным условием

*u*(*x*,0) = 0

и однородными граничными условиями первого рода

*u*(0,*t*) = 0, *u*(*L*,*t*) = 0.

Провести следующий анализ.

1. Дать физическую интерпретацию постановки задачи.
2. Пользуясь методом Фурье, найти решение данной задачи.
3. Установить поведение системы при неограниченном возрастании времени.
4. Установить закон изменения концентрации вещества в середине тела.
5. Установить закон изменения со временем диффузионного потока на концах тела.
6. Установить влияние параметров *D* и *L* на полученные результаты.
7. Дать объяснение всем предшествующим результатам.

### **КОММЕНТАРИИ**

1. Задачи теплофизики рассматриваются, например, в Baier, Bailyn, Dunning, Faghri, Incropera, LandauV, Olander, Reif, Rumer. [↑](#endnote-ref-1)
2. Мы еще вернемся к этому вопросу в последующей Главе. [↑](#endnote-ref-2)
3. В Приложении будет приведено уравнение теплопроводности для многомерного случая. [↑](#endnote-ref-3)
4. На сколь угодно малом интервале [*х*,*х*+*dх*] характеристики просто не успеют измениться. Так что температуру и параметры процесса в каждой точке этого участка можно считать равным их значениям в точке *х*. При этом соответствующее равенство будет выполняться со сколько угодно высокой степенью точности. [↑](#endnote-ref-4)
5. Величины *dx* и *dQ* называется ***дифференциалами*** аргумента *x* и функции *Q=Q*(*x*). Понятие дифференциала рассматриваются в математическом анализе, см., например, в Apostol, Comen, Dunham, Howie, Larson, Telyak, Trench. [↑](#endnote-ref-5)
6. Естественно, в действительности на рассматриваемом интервале времени тело может не нагреваться, а остывать. В этом случае определяемая величина *Q*1 будет отрицательным, т.е. тепло не подводится, а отводится. [↑](#endnote-ref-6)
7. Появление процедуры интегрирования в формуле (10.2) можно объяснить следующем образом. Предположим, что рассматриваемый интервал [*х*,*х*+*dх*] разбит на некоторое количество частей, на каждом из которых характеристики системы являются постоянными. Тогда количество тепла, приходящееся на весь рассматриваемый интервал будет складываться с его значений, определяемых на каждом из полученных подыинтервалов в соответствии с приведенной формулой для количества тепла при условии постоянства параметра. Полученное выражение в действительности представляет собой соответствующую интегральную сумму. Если теперь рассмотреть предел полученного выражение, когда длина максимального из подынтервалов стремится к нулю, то полученный результат в точности соответствует классическому определению понятию ***интеграла***, см., например, в Apostol, Comen, Dunham, Howie, Larson, Telyak, Trench. [↑](#endnote-ref-7)
8. К этим вопросам мы вернемся в Приложении. [↑](#endnote-ref-8)
9. При исследовании теплопереноса в пространстве под тепловым потоком понимается количество тепла, проходящее в единицу времени через единицу поверхности тела. [↑](#endnote-ref-9)
10. Естественно, само значение теплового потока может быть и отрицательным, т.е. движение тепла может быть как в ту, так и в другую сторону. [↑](#endnote-ref-10)
11. ***Теорема о среднем*** имеет естественный геометрический смысл. Значение интеграла от функции *f* наотрезке [*a*,*b*] равно площади криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей кривой, прямыми *y=a*, *y=b* и осью *y*, см. Рис. 10.7. Тогда согласно данному утверждению, на рассматриваемом интервале найдется такая точка *c*, что площадь данной трапеции равна площади прямоугольника со сторонами, равными длине отрезка и значению функции *f* в указанной точке.



Рис. 10.7. Геометрическая иллюстрация теоремы о среднем. [↑](#endnote-ref-11)
12. Вывод уравнения теплопроводности в стационарном случае дается в Главе № 12. [↑](#endnote-ref-12)
13. ***Теория уравнений в частных производных*** является самостоятельным разделом математики, см., например, Farlow, Henry, Hor, Jost, Ladyz, Lions, Mikhlin, Pinch, Polyanin, Tihon, Vladim. [↑](#endnote-ref-13)
14. Все рассматриваемые в данной и последующей х относятся к параболическому типу. В частности, рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка относительно функции двух переменных *u=u*(*x*,*y*), линейное относительно старших производных

 *a*11*uxx* + 2*a*12*uxy* + *a*22*uyy* = *F*(*x*,*y*,*u*,*ux*,*uy*), (10.34)

где *a*11, *a*12, *a*22 – заданные числа, *F* – известная функция своих аргументов, а через *ux*, *uy* и т.д. обозначены соответствующее частные производные. Свойства уравнения в значительной степени определяется знаком величины

*D* = *a*122 – *a*11*a*22,

называемое дискриминантом уравнения. При *D*>0 уравнение называется ***гиперболическим***, при *D*<0 –***эллиптическим***, а при *D*=0 – ***параболическим***. В частности, для уравнения теплопроводности *ut = a*2*uxx* с переменной *y*=*t* имеем *a*11 = *a*2, *a*22 = 0, *a*12 = 0. Таким образом, *D*=0, а значит, уравнение теплопроводности являетсяпараболическим. С помощью специального преобразования независимых переменных  уравнение (10.34) всегда можно привести к каноническому виду



Гиперболические уравнения связаны с волновыми процессами (см. Глава 12), а эллиптические – со стационарными системами (см. Глава 13). В принципе, коэффициенты при старших производных могут зависеть от переменных *x*,*y*. В этом случае тип уравнения может меняться от точки к точке. Это относится, к примеру, к ***уравнению Трикоми*** (см. Polyanin) *uxx = xuyy*, которое является гиперболическим при положительных значениях *x*, гиперболическим при отрицательных *x*. Это уравнение имеет приложения в ***трансзвуковой газовой динамике***, где смене типа уравнения соответствует переход скорости течения газа через скорость звука, см. Bers. [↑](#endnote-ref-14)
15. В многомерном случае уравнение теплопроводности имеет второй порядок по всем пространственным переменным, см. Приложение. [↑](#endnote-ref-15)
16. В принципе, иногда имеет смысл решать задачу со известным значением температуры не в начальный, а в конечный момент времени. В этом случае мы не предсказываем дальнейший ход развития событий по известному значению температуры в данный момент времени, выбираемый за начало отсчета, а пытаемся восстановить предысторию системы, т.е. узнать, как система пришла к этому известному состоянию. К сожалению, уравнение теплопроводности с известными данными в конечный момент времени образует некорректную задачу. Вопросы корректности задач математической физики обсуждаются в Главе № 18. [↑](#endnote-ref-16)
17. Бывают практические ситуации, когда один конец тела недоступен, а недостающую информацию можно получить на другом конце. В этом случае у нас на первом конце вообще не будет граничных условий, а на втором задаются два граничных условия, например, известны как температура, так и тепловой поток. Однако соответствующая краевая задача оказывается некорректной. Тем не менее, ее можно решить, пользуясь теорией обратных задач математической физики, см. № 22. [↑](#endnote-ref-17)
18. Свои особенности имеет постановка граничных условий в многомерном случае, см. Приложение. При рассмотрении переноса тепла в теле бесконечной длины имеет смысл ***задача Коши***, включающая в себя уравнение теплопроводности и начальное условие при *x*∈(-∞,∞). Отсутствующие граничные условия здесь компенсируются предположением о том, что по мере приближения к бесконечности все характеристики системы затухают. В последующей Главе мы рассмотрим также задачу Стефана для уравнения теплопроводности, в которой граница рассматриваемого объекта изменяется со временем. Эта ситуация возникает, например, при описании таяния льда, когда исследуемое ледяное тело со временем уменьшается в объеме. [↑](#endnote-ref-18)
19. Для согласования начального состояния системы с граничными условиями здесь предполагается, что *ϕ*(0)=0 и *ϕ*(*L*)=0. [↑](#endnote-ref-19)
20. Предположим, что задана первая краевая задача общего вида, т.е. граничные условия заданы в виде (10.9). Ее решение будем искать в виде

 *u*(*x*,*t*) *= v*(*x*,*t*) + *w*(*x*,*t*), (10.35)

где функцию *w* мы выберем сами таким образом, чтобы она также удовлетворяла граничным условиям (10.9). Проще всего считать ее линейной относительно пространственной переменной *x*, т.е. определить *w*(*x*,*t*) = *a*(*t*) + *b*(*t*)*x.* Для нахождения функций *a* и *b* достаточно положить функцию *w* равной *α*1(*t*) при *x=*0 и *α*2(*t*) при *x=L*. Нетрудно убедиться, что

 *w*(*x*,*t*) = *α*2(*t*) + (*L – x*)[*α*1(*t*) *–α*2(*t*)]/*L*. (10.36)

В этом случае функция *v* будет равна нулю на обеих границах, будучи разностью между функциями *u* и *w*, принимающими там одно и то же значения. Подставляя функцию *u*, определенную по формуле (10.35) в уравнение теплопроводности(10.11), будем иметь равенство

*vt – a*2*vxx* = (*ut**–**a*2*uxx*) *–* (*wt**–**a*2*wxx*) = *–wt*,

правая часть которого является известной функцией, определяемой с помощью формулы (10.36). Аналогично, подставляя функцию *u* в начальное условие (10.12), имеем соотношение

*v*(*x*,0) = *u*(*x*,0) *– w*(*x*,0) = *ϕ*(*x*) *– w*(*x*,0),

правая часть которого известна. Таким образом, функция *v* удовлетворяет приведенному выше неоднородному уравнению теплопроводности с указанным выше начальным условием и однородными граничными условиями. Методика решения такой задачи проводится в Разделе 3 настоящей Главе. После этого решение неоднородной краевой задачи для уравнения теплопроводности будет определено по формуле (10.35) с функцией *w*, задаваемой равенством (10.36). [↑](#endnote-ref-20)
21. Задачи типа Штурма – Лиувилля встречаются и для других типов уравнений. Рассмотрим, к примеру систему линейных алгебраических уравнений



включающую числовой параметр *λ*. Очевидно, для любых значений *λ* она имеет тривиальное решение *x*1=0, *x*2=0. Однако при *λ*1*=*2 и при *λ*2*=*–3 получаются системы

******

имеющие нетривиальные решения, причем не единственные. Рассматриваемую систему алгебраических уравнение можно записать в матричной форме *Ax=λx* с неизвестным вектором *x=*(*x*1,*x*2) и матрицей



Найденные значения *λ*1 и *λ*2 называются ***собственными числами***, а соответствующие им нетривиальные решения системы – собственными ***векторами матрицы*** *A*. [↑](#endnote-ref-21)
22. Здесь мы фактически пользуемся свойством линейностью уравнения теплопроводности. Естественно, при работе с бесконечной суммой, т.е. с ***рядом*** следует соблюдать максимальную осторожность. Здесь возникают вопросы сходимости ряда, т.е. существование бесконечной суммы, см., например, Apostol, Comen, Dunham, Howie, Larson, Telyak, Trench. Отметим также, что в данном случае речь идет о ***рядах Фурье***. [↑](#endnote-ref-22)
23. Указанные преобразование нуждаются в строгом обосновании. [↑](#endnote-ref-23)
24. Равенства (10.20) определяют ***коэффициенты Фурье*** функции *ϕ*. [↑](#endnote-ref-24)
25. Рассмотренное явление связано со ***вторым законом* *термодинамики*,** который и характеризует стремление системы к равновесному состоянию, что связано с возрастанием ***энтропии***. Рассматриваемые уравнения не обратимы во времени, т.е. по данному состоянию системы нельзя восстановить ее предысторию. Математически это означает, что краевая задача для уравнения теплопроводности с известным конечным, а не начальным состоянием оказывается не корректной (см. № 20). Собственно, наличие необратимых процессов во времени и определяет само понятие времени, для которого имеется принципиальное различие между прошлым и будущим. Процессы переноса не являются строго детерминированными в том смысле, что по данному состоянию системы можно определить лишь будущее, но не прошлое, см. № 5. В этой связи им уже не будет соответствовать динамическая группа преобразований, так как будет нарушено условие обратимости соответствующего преобразования. Однако имеет смысл понятие ***динамического моноида преобразования***, для которого соответствующее требование обратимости отсутствует. [↑](#endnote-ref-25)
26. Источник может быть и отрицательным, например, в случае холодильника. [↑](#endnote-ref-26)
27. Ранее отмечалось, что для решения задачи в неоднородными граничными условиями решение задачи ищется в виде *u = v+w*, где функция *w* подбирается так, чтобы она удовлетворяла тем же граничным условиями, что и функция *u*. Тогда функция *v* будет удовлетворять неоднородному уравнению теплопроводности с однородными граничными условиями. [↑](#endnote-ref-27)
28. Дифференцирование ряда, вообще говоря, не очевидно и нуждается в обоснование. [↑](#endnote-ref-28)
29. Мы убеждаемся в том, что понятие положения равновесия имеет смысл и для уравнений в частных производных. Однако в отличие от систем с сосредоточенными параметрами положение равновесия здесь является функцией пространственных переменных. Отметим также, что, как видно из полученных результатов, равновесное состояние системы не обязательно является равномерным. Эти два понятия совпадают в том случае, когда коэффициенты уравнения постоянны и отсутствует влияние источников. В многомерном случае равновесные состояния, т.е. предельные состояния динамической системы при *t*→∞ будут описываться уравнениями с частными производными, см. № 13. [↑](#endnote-ref-29)
30. Задачи массопереноса относятся к молекулярной физике, см. Faghri, Hirschfelder, Incropera, Leach, Schlick. [↑](#endnote-ref-30)
31. Еще одной причиной изменения температуры тела может быть тепловое излучение. [↑](#endnote-ref-31)
32. Мы еще встретимся с оператором Лапласа в дальнейшем при описании волновых процессов и стационарных систем. [↑](#endnote-ref-32)
33. В областях специальной формы за счет специальной замены переменных можно упростить анализ уравнения. К примеру, в двумерном случае, если исследуемая область Ω представляет собой круг радиуса *R*, то можно перейти к полярным координатам в соответствии с равенствами *x = r* cos*ϕ*, *y* = *r* sin*ϕ*. Нетрудно убедиться, что оператор Лапласа в полярной системе координат характеризуется равенством



Хотя переход в полярные координаты характеризуется выражением с переменными коэффициентами, в этом представлении параметры *r* и *ϕ* здесь будут меняться независимо друг от друга, в частности, 0<*r*<*R* и 0<*ϕ*<2π. Если, теперь система обладает радиальной симметрией, то производная от искомой функции по угловой переменной будет равна нулю. В этом случае уравнение теплопроводности в круге примет вид



Помимо того, что мы перешли от функции трех переменных к функции двух переменных, есть еще одно важное обстоятельство. В исходной постановки задачи в декартовых координатах метод разделения переменных оказывается не применимым, поскольку в границе круга, характеризуемой равенством *x*2+*y*2=*R*2, нельзя отделить одну переменной от другой. Однако для приведенного выше соотношения метод разделения переменных успешно работает. В трехмерном случае используют также сферические, цилиндрические и некоторые другие системы координат. Мы будем явным образом использовать переход к другим системам координат при описании стационарных систем, см. № 13. [↑](#endnote-ref-33)
34. В двумерном случае границей некоторого ограниченного плоского объекта является замкнутая кривая, ограничивающее, этот объект. Границей трехмерного тела является ограничивающая его поверхность. В общем случае размерность границы на единицу меньше размерности самой области. [↑](#endnote-ref-34)
35. Может создаться впечатление, что при формулировки первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в многомерном случае было нарушено указанное ранее правило, состоящее в том, что число дополнительных условий должно равняться максимальному порядку производной, входящей в уравнение. В нашем случае уравнение имеет второй порядок по пространственным переменным. Однако мы имеем лишь одно граничное условие, задавая температуру на границе. В действительности, в пространственно одномерном случае граница состояла из двух точек – левой и правой границы. Таким образом, поставленные ранее граничные условия для уравнения теплопроводности также предполагают задание по одному ровно по одному условию в каждой границе. Если же, к примеру, в двумерном случае рассматриваемая область Ω представляет собой прямоугольник, характеризуемый неравенствами 0<*x*<*L*, 0<*y*<*M*, то граница *S* состоит из четырех сторон прямоугольника. Таким образом, первая краевая задача требует задание температуры при *x* = 0, *x* = *L*, *y* = 0 и
*y* = *M*. Тем самым мы получаем по два условиях относительно каждой пространственной переменной, что в полной степени соответствует использованному ранее правилу. [↑](#endnote-ref-35)
36. Если решение второй краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности в соответствии с ***методом разделения переменных*** искать в виде произведения *u*(*x*,*t*) = *X*(*x*)*T*(*t*), то относительно функции *X* получается краевая задача

 *X'*(0) = 0, *X'*(*L*) = 0.

Нетрудно убедиться, что ее решениями будут косинусы, а не синусы. Вследствие этого решение второй краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности согласно методу Фурье ищется в виде ряда по косинусам, коэффициенты которого определяются свободным членом уравнения (источником тепла) и начальным состоянием системы. В результате получается решение данной задачи в указанном виде. [↑](#endnote-ref-36)
37. Мы уже сталкивались с концентрацией при описании химических процессов, см. № 6. В последующей Главе мы рассмотрим диффузию веществ при наличии химических реакций. [↑](#endnote-ref-37)
38. Этот случае мы рассмотрим в последующей Главе. [↑](#endnote-ref-38)
39. В двумерном случае поток представляет собой количество вещества, проходящего в единицу времени через участок единичной длины, а в трехмерном случае – через поверхность единичной площади. [↑](#endnote-ref-39)